SÉRIES TEMPORAIS

Mestrado em Econometria Aplicada e Previsão

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Jorge Caiado
Departamento de Matemática e CEMAPRE
Instituto Superior de Economia e Gestão/Universidade de Lisboa
Email: jcaiado@iseg.utl.pt
Web: http://pascal.iseg.utl.pt/~jcaiado/

Lisboa

Parte I – INTRODUÇÃO AOS MÉTODOS DE PREVISÃO

1. Considere os seguintes valores da série de vendas de um certo produto financeiro:

	ANO 1				ANO 2				ANO 3			
	1ºT	2ºT	3ºT	4ºT	1ºT	2ºT	3ºT	4ºT	1ºT	2ºT	3ºT	4ºT
Y_t	24	34	28	30	31	42	32	34	39	53	43	47

Suponha que no 4º trimestre do Ano 3 se obteve pelo método de Holt-Winters com sazonalidade multiplicativa os seguintes valores:

$$\hat{a}(12) = 47.058; \hat{b}(12) = 2.143; \hat{S}_{12} = 1.017; \hat{S}_{11} = 0.954; \hat{S}_{10} = 1.185; \hat{S}_9 = 0.865$$

com $\alpha = 0.3; \beta = 0.25$ e $\gamma = 0.15$

Tendo observado Y_{13}=44, Y_{14}=61, Y_{15}=50, Y_{16}=53, apresente previsões para os 4 trimestres subsequentes.

2. Considere uma série temporal observada em 6 meses consecutivos:

t	1	2	3	4	5	6
Y_t	80	85	100	125	160	200

Ajuste aos dados um modelo de Holt com α=0.45 e β=0.2 (inicializando com as primeiras 4 observações) e estabeleça previsões para os três meses seguintes (t = 7, 8 e 9).

3. Considere a série da taxa de desemprego em Portugal entre o 1º trimestre de 1994 e o 3º trimestre de 1995:

Ano/Trim.	Y_t	Ano/Trim.	Y_t
1994:1	6.8	1995:1	7.4
1994:2	6.7	1995:2	7.0
1994:3	6.8	1995:3	6.9
1994:4	7.1		

Usando o método de Holt, com α = 0.2 e β = 0.05, estime a taxa de desemprego para o 4º trimestre de 1995. Considere as primeiras 2 observações na inicialização.

4. No quadro seguinte encontram-se os resultados líquidos da empresa ABC, em 5 anos sucessivos, e os respectivos alisamentos exponenciais simples e duplos:

t	1	2	3	4	5
Y_t	40	38	45	50	51
M_t	22	23.6	25.74	28.17	30.45
D_t	4	5.96	7.94	9.96	12.01

a) Determine o valor da constante de alisamento e interprete-o.

b) Calcule as estimativas iniciais do nível e do declive de tendência da série, $a(1)$ e $b(1)$.

c) Sabendo que $Y_6 = 60$ estabeleça previsões dos valores do resultado líquido da empresa para os instantes $t = 7$, 8 e 9.

5. Os valores mensais da taxa de inflação homóloga em Portugal no período de Janeiro de 1997 a Dezembro de 1998 encontram-se no quadro seguinte:

Período	Tx. Inflação	Período	Tx. Inflação
1997:01	3.3	1998:01	1.9
1997:02	2.9	1998:02	2.1
1997:03	2.5	1998:03	2.3
1997:04	1.8	1998:04	2.7
1997:05	2.1	1998:05	2.6
1997:06	1.8	1998:06	2.9
1997:07	1.7	1998:07	3.1
1997:08	1.9	1998:08	3.1
1997:09	1.8	1998:09	3.1
1997:10	1.8	1998:10	3.2
1997:11	2.1	1998:11	3.1
1997:12	2.3	1998:12	3.2

Ajuste aos valores da série observada no período de 1998:07 a 1998:12 um modelo de alisamento exponencial duplo com $\alpha = 0.15$. Estabeleça previsões para os meses de Janeiro, Fevereiro e Março de 1999.

6. Com base no seguinte modelo de previsão para séries com tendência e sem sazonalidade:

$$a(t) = \alpha Y_t + (1-\alpha)[a(t-1) + b(t-1)] \ , 0 < \alpha < 1$$

$$b(t) = \beta[a(t) - a(t-1)] + (1-\beta)b(t-1) \ , 0 < \beta < 1$$

e nos valores $b(23) = 5.5, \hat{Y}_{24} = 246.48$ e $Y_{24} = 266$ para $\alpha = 0.501$ e $\beta = 0.072$, estabeleça previsões para os instantes $t = 25, 26$ e 27.

7. A aplicação do método de Holt-Winters multiplicativo no ajustamento de uma série de dados trimestrais, conduziu às seguintes grandezas: $S(17) = 0.8$, $S(18) = 0.8$, $S(19) = 1$, $S(20) = 1.4$, $a(20) = 203.4$ e $b(20) = -2.3$, com $\alpha = 0.3$, $\beta = 0.2$ e $\gamma = 0.3$. Tendo-se observado $Y_{21} = 184$ e $Y_{22} = 198$, apresente previsões para os 4 trimestres subsequentes.

8. Sejam M_t e D_t respectivamente os alisamentos exponenciais simples e duplo dos valores de uma série. Em que condições se tem $M_t < D_t$, $M_t > D_t$ e $M_t \approx D_t$? Justifique convenientemente a sua resposta.

9. No quadro abaixo encontram-se dados do ajustamento de um modelo de alisamento exponencial duplo $\alpha = 0.3$ a uma série com 3 observações:

T	Y_t	M_t	D_t	$a(t)$	$B(t)$	Previsões
1	20			15.00	5.00	
2	25					
3		15.88				
4						
5						

Complete os valores em falta.

10. O ajustamento do modelo de Holt-Winters aditivo a uma série de dados trimestrais, com $\alpha = 0.25$, $\beta = 0.3$ e $\gamma = 0.1$, conduziu às seguintes grandezas: $S_1 = 18.75$, $S_2 = -31.25$, $Y_3 = 75$, $Y_4 = 200$, $a(4) = 131.25$, $Y_5 = 125$ e $P_5 = 156.25$. Apresente previsões para os 4 trimestres subsequentes (P_6, P_7, P_8 e P_9).

11. Mostre que o modelo de alisamento exponencial simples (M_t) representa uma média móvel ponderada das observações passadas da série Y_t, isto é, $M_t = \alpha \sum_{j=0}^{t-1} (1-\alpha)^j Y_{t-j}$.

12. A aplicação do modelo de alisamento exponencial duplo, com α =0.2, a uma série temporal Y_t com 30 observações conduziu a M_{30} = 140 e D_{30} = 105.

a) Utilize estes valores para inicializar a aplicação do modelo de Holt.

b) Com Y_{31} = 23, Y_{32} = 31, α =0.2, β=0.15, apresente previsões com o modelo de Holt para os instantes 33 e 34.

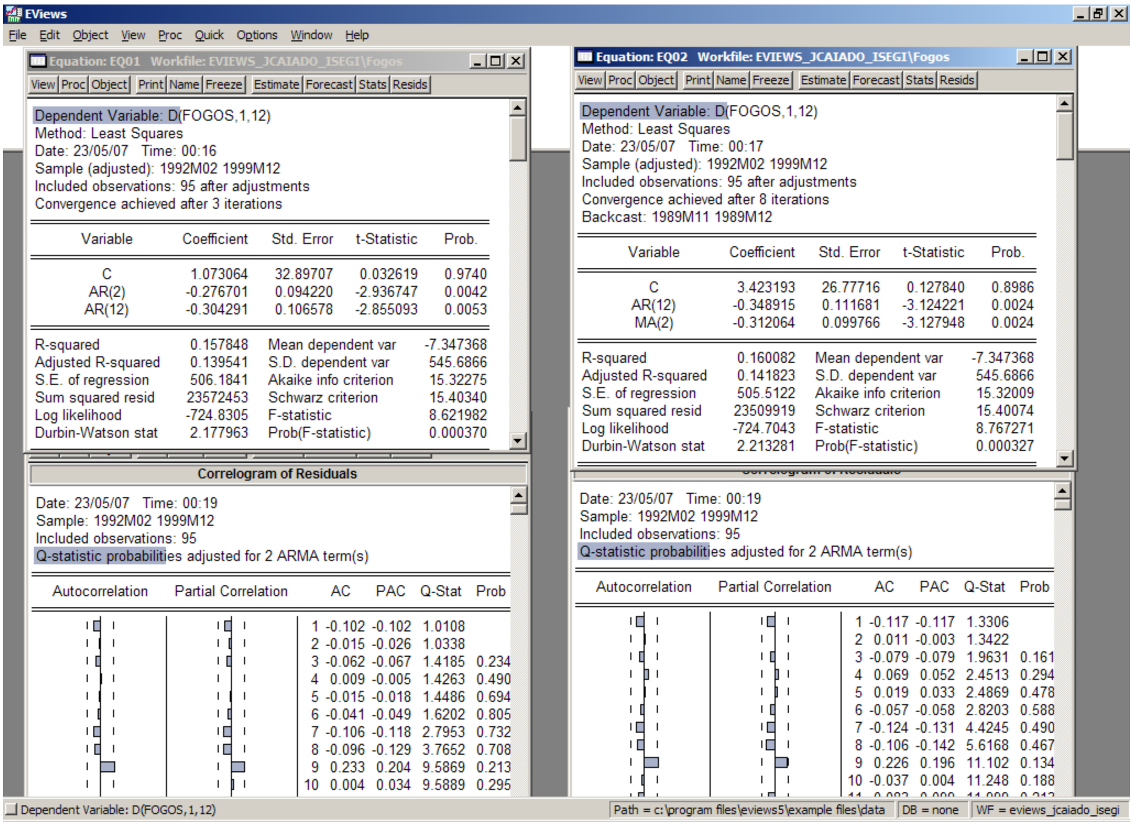
13. Com o objectivo de prever a taxa de inflação mensal (Y_t), um consultor financeiro recorreu à metodologia de previsão de Holt (alisamento exponencial com duas equações de actualização) e obteve as grandezas a(156)=3.971554 e P_{157}=4.008614 com as contantes de alisamento α=0.6 e β=0.15. Se no mês t=157 observar que Y_{157}=4.3, obtenha as estimativas de a(157) e b(157) e as previsões P_{158}, P_{159} e P_{160}.

14. A aplicação do modelo de Holt-Winters multiplicativo a uma série com 10 observações trimestrais, com Y_{10}=20 e γ=0,2, conduziu às seguintes grandezas: S_6=0.6; S_7=0.8; S_8=0.4; $\hat{Y}_{11} = 25$; $\hat{Y}_{12} = 22$. Face ao exposto obtenha uma previsão para o instante t=14.

Parte II – MODELOS AUTOREGRESSIVOS E DE MÉDIAS MÓVEIS (ARMA)

1. Escreva as equações estimadas EQ01 e EQ02 em função da série original (nº de fogos construídos) e comente os resultados de estimação em termos de:

- Significância estatística e económica dos parâmetros;
- Avaliação da qualidade de ajustamento do modelo;
- Selecção do melhor modelo.



Equation: EQ01 Workfile: EVIEWS_JCAIADO_ISEGI\Fogos

Dependent Variable: D(FOGOS,1,12)
Method: Least Squares
Date: 23/05/07 Time: 00:16
Sample (adjusted): 1992M02 1999M12
Included observations: 95 after adjustments
Convergence achieved after 3 iterations

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	1.073064	32.89707	0.032619	0.9740
AR(2)	-0.276701	0.094220	-2.936747	0.0042
AR(12)	-0.304291	0.106578	-2.855093	0.0053

R-squared	0.157848	Mean dependent var	-7.347368
Adjusted R-squared	0.139541	S.D. dependent var	545.6866
S.E. of regression	506.1841	Akaike info criterion	15.32275
Sum squared resid	23572453	Schwarz criterion	15.40340
Log likelihood	-724.8305	F-statistic	8.621982
Durbin-Watson stat	2.177963	Prob(F-statistic)	0.000370

Correlogram of Residuals

Date: 23/05/07 Time: 00:19
Sample: 1992M02 1999M12
Included observations: 95
Q-statistic probabilities adjusted for 2 ARMA term(s)

	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	-0.102	-0.102	1.0108	
2	-0.015	-0.026	1.0338	
3	-0.062	-0.067	1.4185	0.234
4	0.009	-0.005	1.4263	0.490
5	-0.015	-0.018	1.4486	0.694
6	-0.041	-0.049	1.6202	0.805
7	-0.106	-0.118	2.7953	0.732
8	-0.096	-0.129	3.7652	0.708
9	0.233	0.204	9.5869	0.213
10	0.004	0.034	9.5889	0.295

Equation: EQ02 Workfile: EVIEWS_JCAIADO_ISEGI\Fogos

Dependent Variable: D(FOGOS,1,12)
Method: Least Squares
Date: 23/05/07 Time: 00:17
Sample (adjusted): 1992M02 1999M12
Included observations: 95 after adjustments
Convergence achieved after 8 iterations
Backcast: 1989M11 1989M12

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	3.423193	26.77716	0.127840	0.8986
AR(12)	-0.348915	0.111681	-3.124221	0.0024
MA(2)	-0.312064	0.099766	-3.127948	0.0024

R-squared	0.160082	Mean dependent var	-7.347368
Adjusted R-squared	0.141823	S.D. dependent var	545.6866
S.E. of regression	505.5122	Akaike info criterion	15.32009
Sum squared resid	23509919	Schwarz criterion	15.40074
Log likelihood	-724.7043	F-statistic	8.767271
Durbin-Watson stat	2.213281	Prob(F-statistic)	0.000327

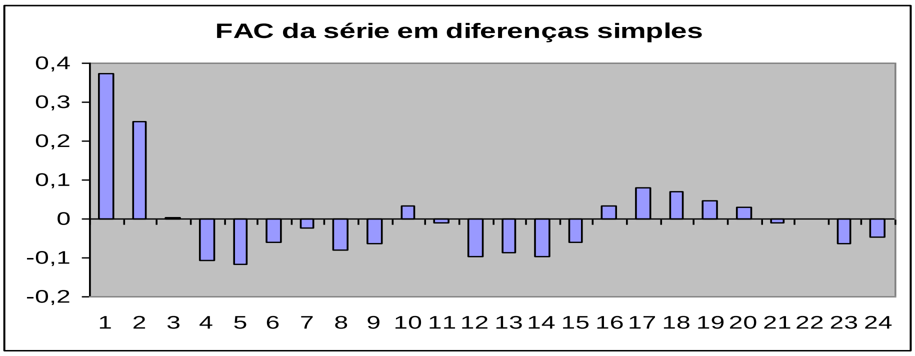
Date: 23/05/07 Time: 00:19
Sample: 1992M02 1999M12
Included observations: 95
Q-statistic probabilities adjusted for 2 ARMA term(s)

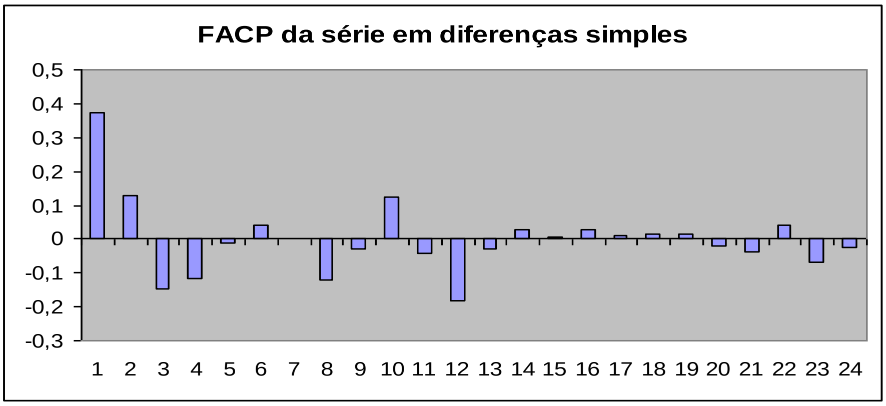
	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	-0.117	-0.117	1.3306	
2	0.011	-0.003	1.3422	
3	-0.079	-0.079	1.9631	0.161
4	0.069	0.052	2.4513	0.294
5	0.019	0.033	2.4869	0.478
6	-0.057	-0.058	2.8203	0.588
7	-0.124	-0.131	4.4245	0.490
8	-0.106	-0.142	5.6168	0.467
9	0.226	0.196	11.102	0.134
10	-0.037	0.004	11.248	0.188

Dependent Variable: D(FOGOS,1,12)
Path = c:\program files\eviews5\example files\data | DB = none | WF = eviews_jcaiado_isegi

2. Considere uma série temporal Y_t com 50 observações mensais ajustada pelo modelo AR(1): $(1-0{,}8\phi)Y_t = 0{,}5+\varepsilon_t$, onde as últimas 3 observações disponíveis são $Y_{48}=10$, $Y_{49}=12$ e $Y_{50}=15$. Calcule as previsões para os valores futuros Y_{51}, Y_{52} e Y_{53}.

3. A modelação de uma série temporal com 100 observações conduziu aos seguintes resultados:





Autocorrelações e Autocorrelações parciais dos resíduos

	FAC	FACP	Est-Q	Prob
1	-0,049	-0,049	0	
2	0,169	0,167	50.115	0,025
3	-0,058	-0,044	55.545	0,062
4	-0,093	-0,129	69.543	0,073
5	-0,081	-0,076	80.334	0,09
6	-0,018	0,012	80.887	0,151
7	0,026	0,045	82.011	0,224
8	-0,071	-0,091	90.436	0,25
9	-0,059	-0,103	96.229	0,292
10	0,068	0,092	10.405	0,319
11	0,012	0,055	10.428	0,404
12	-0,075	-0,134	11.406	0,41
13	-0,039	-0,097	11.670	0,473
14	-0,061	-0,017	12.313	0,502
15	-0,051	-0,007	12.762	0,545
16	0,046	0,032	13.143	0,591
17	0,057	0,014	13.732	0,619
18	0,049	0,021	14.158	0,656
19	0,01	0,017	14.176	0,718
20	0,02	0,001	14.247	0,769

a) Proceda à identificação do(s) modelo(s) candidado(s) a descrever a série diferenciada. Justifique convenientemente a sua escolha.

b) Da análise da FAC e da FACP dos resíduos, discuta a qualidade do ajustamento do modelo à série.

4. Considere o seguinte modelo ARIMA estimado com base numa série *Y* com 143 observações trimestrais:

Dependent Variable: D(LOG(Y),1,4)
Date: 05/06/07 Time: 22:20
Sample (adjusted): 1951Q1 1986Q3
Included observations: 143 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-9.67E-05	5.81E-05	-1.663108	0.0986
AR(3)	-0.023108	0.081571	-0.283286	0.7774
SAR(8)	-0.128100	0.073435	-1.744392	0.0833
MA(4)	-0.984290	0.014067	-69.97158	0.0000
SMA(12)	-0.122485	0.054552	-2.245289	0.0263

R-squared	0.574943	Mean dependent var	-0.000777
Adjusted R-squared	0.562622	S.D. dependent var	0.015666
S.E. of regression	0.010361	Akaike info criterion	-6.267241
Sum squared resid	0.014814	Schwarz criterion	-6.163645
Log likelihood	453.1077	F-statistic	46.66555
Durbin-Watson stat	1.280239	Prob(F-statistic)	0.000000

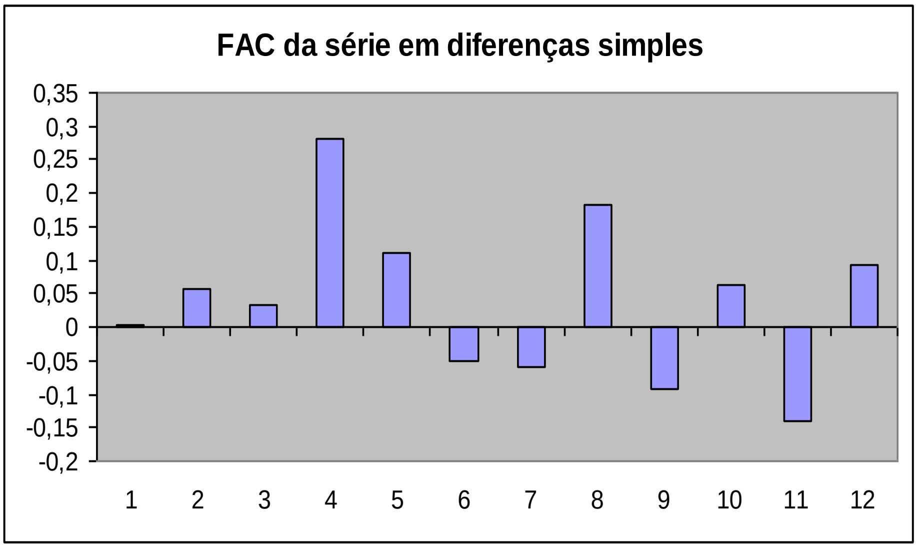
Inverted AR Roots	.71+.30i	.71-.30i	.30-.71i	.30+.71i
	.14+.25i	.14-.25i	-.28	-.30+.71i
	-.30-.71i	-.71-.30i	-.71+.30i	
Inverted MA Roots	1.00	.84	.73+.42i	.73-.42i
	.42-.73i	.42+.73i	.00+.84i	

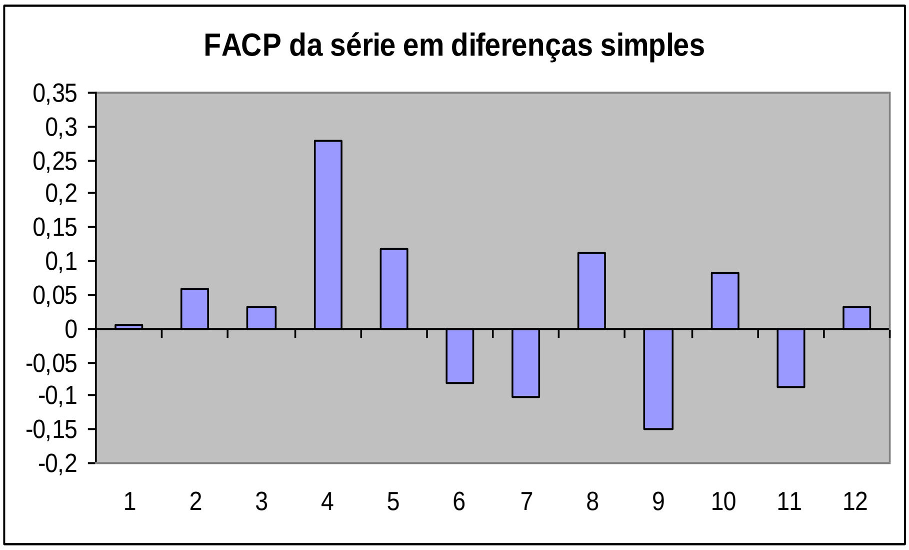
a) Escreva o modelo na forma compactada utilizando o operador atraso. Em seguida, multiplique os polinómios e rearranje a equação de modo a isolar a série transformada D(LOG(Y),1,4) no primeiro membro.

b) Interprete o modelo estimado do ponto de vista estatístico e económico.

5. Descreva genericamente o processo de avaliação da qualidade de previsão dos modelos univariados de séries temporais.

6. Na aplicação da metodologia de Box-Jenkins a uma série temporal com 24 observações trimestrais, obtiveram-se aos seguintes resultados:





Autocorrelações e Autocorrelações parciais dos resíduos

	FAC	FACP	Est-Q	Prob
1	0,0600	0,0600	0,0956	
2	0,1120	0,1090	0,4381	0,5080
3	-0,0330	-0,0460	0,4691	0,7910
4	0,3240	0,3220	3,6556	0,3010
5	0,0090	-0,0290	3,6580	0,4540
6	-0,1000	-0,1830	3,9965	0,5500
7	-0,0120	0,0500	4,0015	0,6760
8	-0,0640	-0,1680	4,1577	0,7610
9	-0,0800	-0,0930	4,4195	0,8170
10	-0,0110	0,1500	4,4247	0,8810

a) Proceda à identificação do(s) modelo(s) candidado(s) a descrever a série diferenciada. Justifique convenientemente a sua escolha.

b) Da análise da FAC e da FACP dos resíduos, discuta a qualidade do ajustamento do modelo à série.

7. Considere a seguinte equação estimada para uma série de dados mensais Y, que representa o nº de casas vendidas nos EUA, utilizando o software EViews:

Dependent Variable: D(Y,0,12)
Method: Least Squares
Included observations: 82 after adjustments
Convergence achieved after 12 iterations

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.604076	1.705894	0.354111	0.7242
AR(1)	0.908627	0.049394	18.39547	0.0000
MA(2)	-0.311849	0.116772	-2.670571	0.0092
SMA(12)	-0.837225	0.038962	-21.48814	0.0000

R-squared	0.732175	Mean dependent var	0.219512
Adjusted R-squared	0.721874	S.D. dependent var	7.750786
S.E. of regression	4.087585	Akaike info criterion	5.701336
Sum squared resid	1303.252	Schwarz criterion	5.818737
Log likelihood	-229.7548	F-statistic	71.07816
Durbin-Watson stat	2.352190	Prob(F-statistic)	0.000000

Inverted AR Roots	.91			
Inverted MA Roots	.99	.85+.49i	.85-.49i	.56
	.49-.85i	.49+.85i	.00+.99i	-.00-.99i
	-.49-.85i	-.49+.85i	-.56	-.85+.49i
	-.85-.49i	-.99		

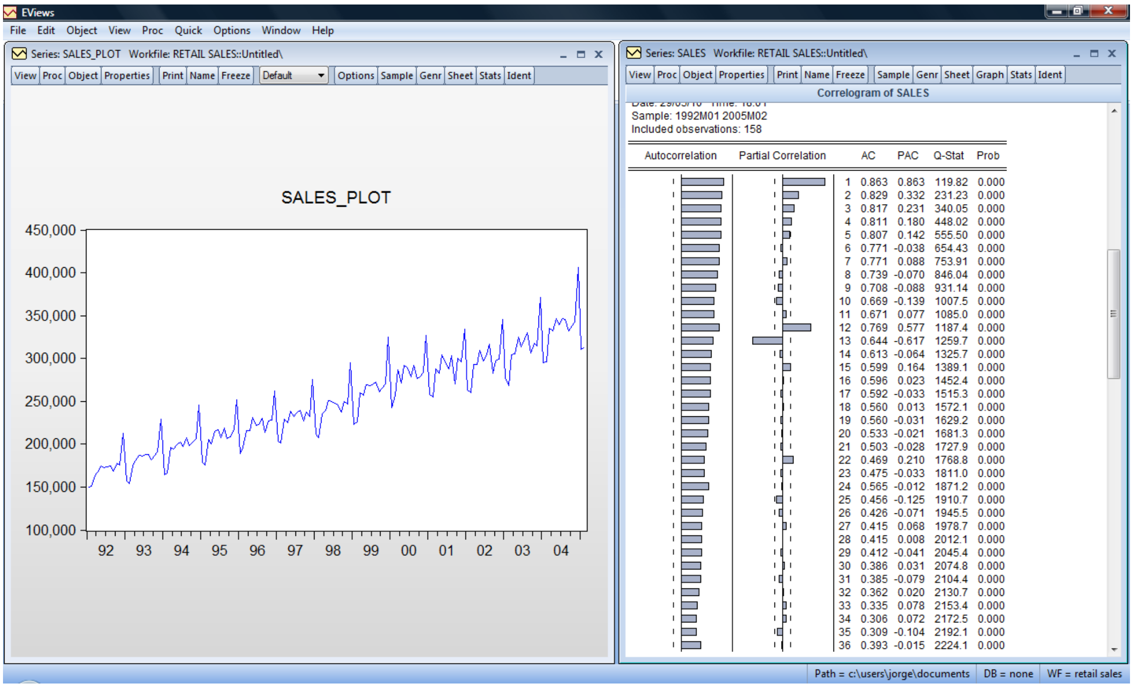
a) Indique o número de observações da série *Y*.

b) Escreva o modelo na forma compactada utilizando o operador atraso. Em seguida, multiplique os polinómios e rearranje a equação de modo a isolar *Y* no primeiro membro.

c) Interprete o modelo estimado dos pontos de vista estatístico e económico.

8. Considere a série de vendas mensais de “retail and food services”, em milhões de dólares, no período de Janeiro de 1992 a Fevereiro de 2005 (Fonte: U.S. Department of Commerce: Census Bureau) e as respectivas funções de autocorrelação (FAC) e autocorrelação parcial (FACP):

Figura 1



a) Descreva o cronograma da série original.

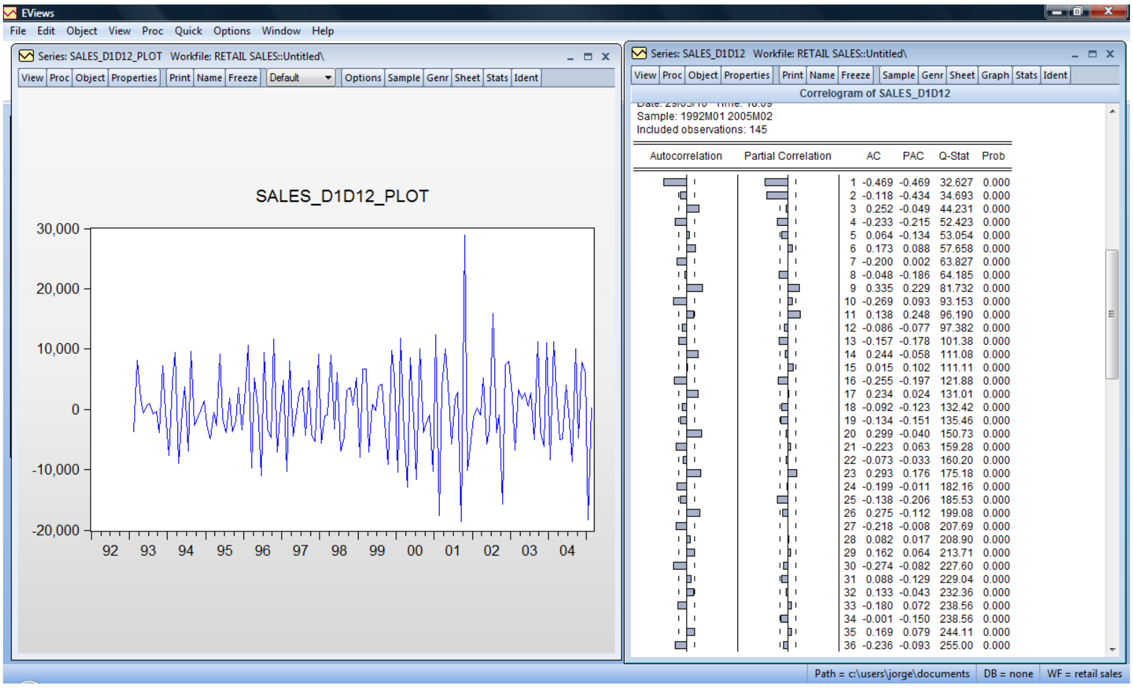
b) Interprete as funções de autocorrelação (FAC) e autocorrelação parcial (FACP).

c) Na Figura 2 encontra-se a série com uma diferença não sazonal e uma diferença não sazonal, $(1-B)(1-B^{12})Y_t$, e as respectivas FAC e FACP estimadas.

i) O que lhe sugere este cronograma?

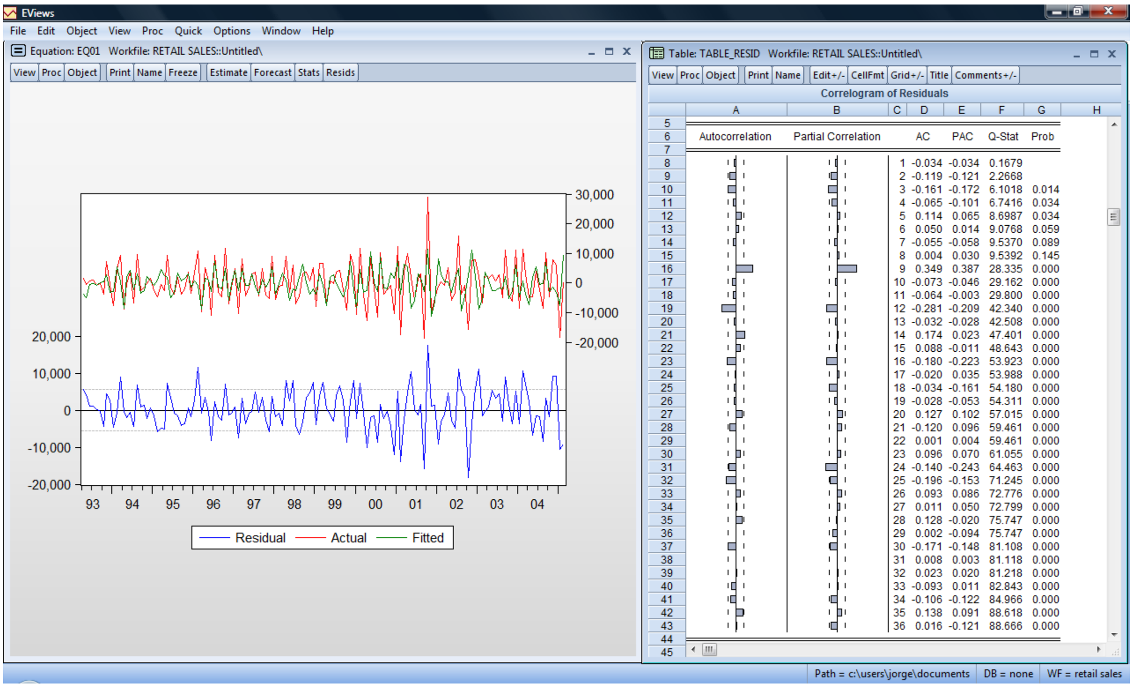
ii) Proponha um modelo SARIMA “candidato” a descrever a série. Justifique convenientemente a sua escolha.

<u>Figura 2</u>



d) Foi ajustado à série em estudo um modelo SARIMA, o que conduziu aos seguintes indicadores de avaliação do diagnóstico:

<u>Figura 3</u>



Teste a significância individual da FAC e da FACP e a significância global da FAC para os primeiros 24 desfasamentos. Refira-se à qualidade de ajustamento do modelo à série.

9. Considere que foi ajustado o seguinte modelo ARMA a uma série de dados anuais no período de 1980-2005:

$$Y_t = c + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_3 Y_{t-3} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1},$$

onde c é uma constante e ε_t é um ruído branco.

a) Identifique os parâmetros p e q.

b) Explique a estrutura do modelo.

c) As últimas 5 observações da série foram as seguintes:

Ano	2001	2002	2003	2004	2005
Y_t	67	75	71	72	83

Com base nos parâmetros estimados $c = 15.6$, $\phi_1 = 0.75$, $\phi_3 = -0.24$ e $\theta_1 = 0.45$, apresente previsões para os próximos três anos (2006, 2007 e 2008). Admita que $\hat{\varepsilon}_{2005} = 0$

10. Utilizando o operador atraso, escreva um modelo ARIMA de parâmetros $\phi_1 = 0.75$, $\phi_2 = -0.27$ e $\theta_1 = -0.45$ com a aplicação de uma transformação logarítmica (de base natural) e uma diferenciação dupla. Em seguida, reescreva o modelo sem o operador atraso.

11. Considere que foi ajustado um modelo SARIMA à série da taxa de desemprego (UNRATE) nos Estados Unidos, entre 1953:Q1 e 2004:Q4, num total de 208 observações trimestrais. Os resultados obtidos foram os seguintes:

Equação estimada

Dependent Variable: DLOG(UNRATE,1,4)
Method: Least Squares
Convergence achieved after 15 iterations

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(1)	0.631224	0.055690	11.33465	0.0000
MA(4)	-1.365138	0.066688	-20.47052	0.0000
MA(8)	0.164233	0.107965	1.521177	0.1298
MA(12)	0.213443	0.062978	3.389164	0.0008

R-squared	0.797690	Mean dependent var	-0.004416
Adjusted R-squared	0.794625	S.D. dependent var	0.096881
S.E. of regression	0.043905	Akaike info criterion	-3.393979
Sum squared resid	0.381672	Schwarz criterion	-3.328469
Log likelihood	346.7919	Hannan-Quinn criter.	-3.367474
Durbin-Watson stat	2.075837		

Inverted AR Roots	.63			
Inverted MA Roots	.99	.92	.53-.53i	.53-.53i
	.00+.99i	-.00+.92i	-.00-.99i	-.00-.92i
	-.53+.53i	-.53-.53i	-.92	-.99

Correlograma

	AC	PAC	Q-Stat	Prob		AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	-0.040	-0.040	0.3306		11	-0.048	-0.023	12.909	0.074
2	0.096	0.095	2.2431		12	-0.028	-0.043	13.077	0.109
3	-0.055	-0.048	2.8692		13	0.008	0.005	13.091	0.159
4	0.056	0.044	3.5336		14	-0.014	-0.029	13.135	0.216
5	-0.124	-0.112	6.7268	0.009	15	-0.081	-0.055	14.580	0.203
6	0.109	0.093	9.2319	0.010	16	-0.002	-0.019	14.581	0.265
7	0.058	0.091	9.9548	0.019	17	-0.048	-0.059	15.104	0.301
8	-0.004	-0.032	9.9581	0.041	18	0.040	0.055	15.460	0.347
9	-0.043	-0.039	10.345	0.066	19	-0.028	-0.009	15.633	0.407
10	0.098	0.087	12.404	0.054	20	0.031	-0.008	15.845	0.464

a) Indique o número de observações incluídas na estimação.

b) Escreva o modelo na forma compactada utilizando o operador atraso. Em seguida, escreva a equação de modo a isolar a série $UNRATE_t$ no primeiro membro.

c) Avalie a qualidade de estatística das estimativas obtidas e a qualidade de ajustamento do modelo aos dados.

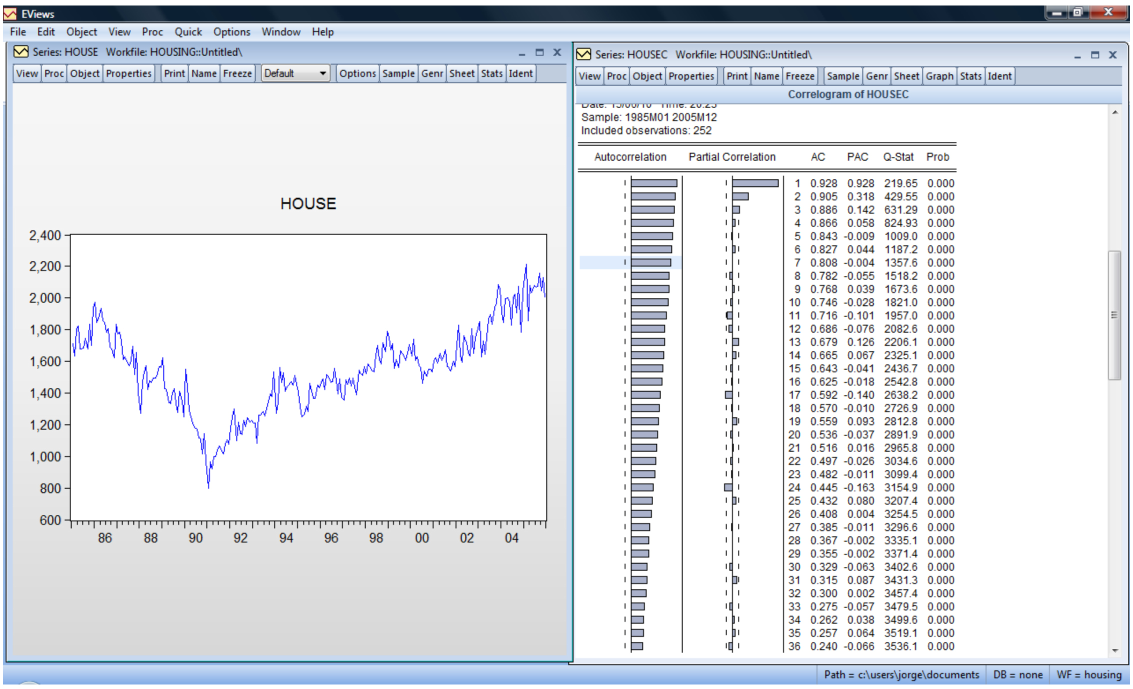
d) Sabendo que a taxa de desemprego (UNRATE) observada nos últimos dois anos foi a seguinte:

Período	UNRATE
2003Q1	5.8
2003Q2	6.1
2003Q3	6.1
2003Q4	5.9
2004Q1	5.7
2004Q2	5.6
2004Q3	5.4
2004Q4	5.4

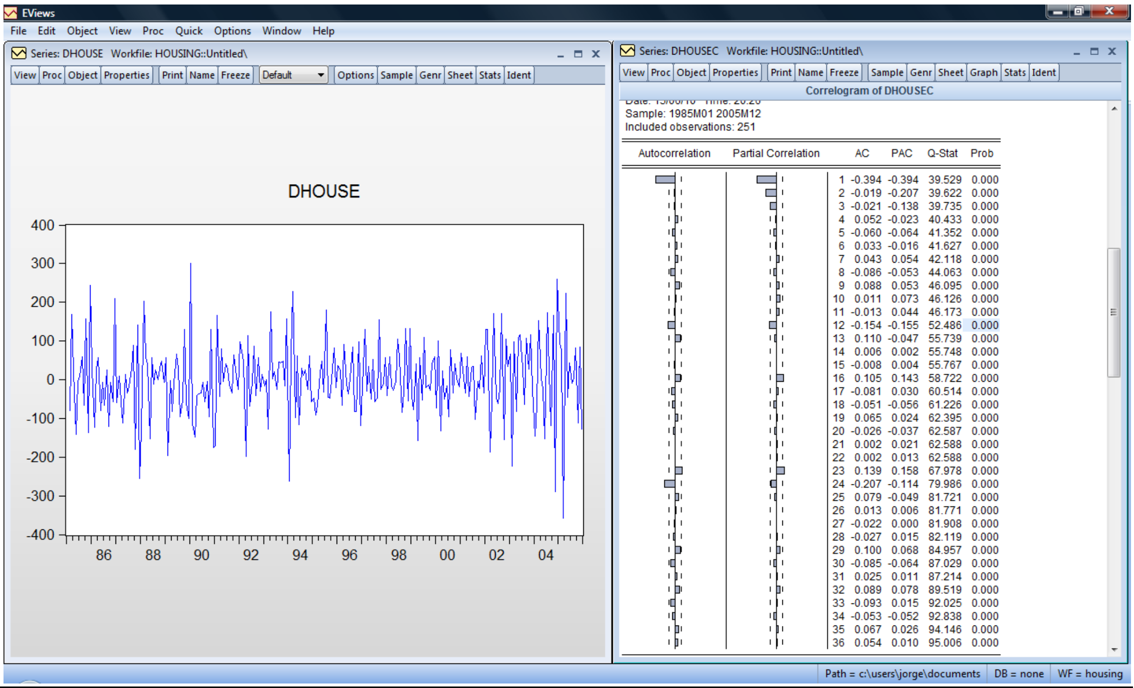
Estabeleça uma previsão para o trimestre subsequente, 2005Q1 (admita que ε_t=0, t=1953Q1,…,2005Q4)

12. Num estudo de modelação e previsão do número de novas habitações particulares (em milhares) nos Estados Unidos, entre Janeiro de 1985 e Dezembro de 2005 (Fonte: Federal Reserve Bank of St Louis), obtiveram-se os seguintes resultados:

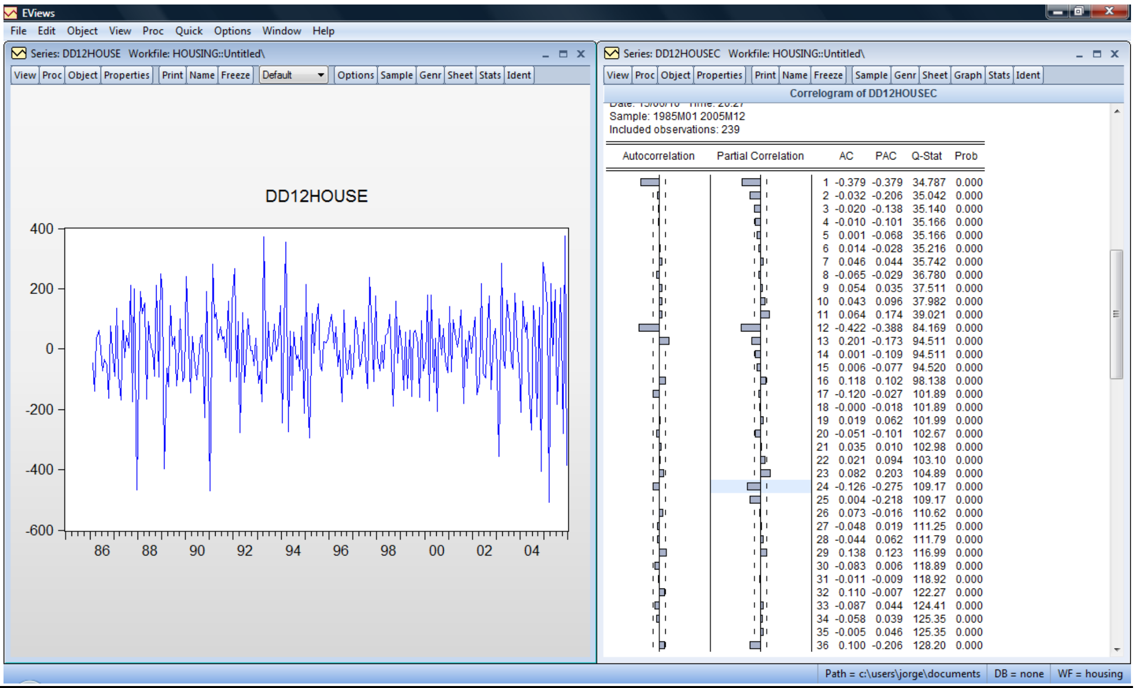
Figura 1



<u>Figura 2</u>



<u>Figura 3</u>



onde:

HOUSE = Série original

DHOUSE = Série com uma diferenciação simples

DD12HOUSE = Série com uma diferenciação simples e uma diferenciação sazonal

a) Interprete o cronograma da série original e o respectivo correlograma.

b) Comente a estacionaridade da série transformada com uma diferenciação simples.

c) Identifique um modelo SARIMA para descrever a série com base no correlograma da série com uma diferenciação simples e uma diferenciação sazonal. Justifique convenientemente a escolha.

d) Com base nos resultados seguintes, interprete os resultados de estimação e avaliação do diagnóstico dos modelos **A** e **B**. Qual dos dois modelos se adequa melhor à série em estudo?

e) Escreva os modelos **A** e **B** com e sem o operador atraso.

<u>Modelo A</u>

Dependent Variable: D(HOUSE)
Method: Least Squares
Sample (adjusted): 1986M03 2005M12
Included observations: 238 after adjustments
Convergence achieved after 5 iterations

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.756316	3.469742	0.217975	0.8276
AR(1)	-0.393528	0.059936	-6.565815	0.0000
SAR(12)	-0.183156	0.065253	-2.806849	0.0054

R-squared	0.181186	Mean dependent var	0.647059
Adjusted R-squared	0.174218	S.D. dependent var	97.11671
S.E. of regression	88.25244	Akaike info criterion	11.81080
Sum squared resid	1830296.	Schwarz criterion	11.85457
Log likelihood	-1402.486	Hannan-Quinn criter.	11.82844
F-statistic	26.00030	Durbin-Watson stat	2.156248
Prob(F-statistic)	0.000000		

Inverted AR Roots	.84-.22i	.84+.22i	.61-.61i	.61+.61i
	.22+.84i	.22-.84i	-.22-.84i	-.22+.84i
	-.39	-.61+.61i	-.61+.61i	-.84-.22i
	-.84+.22i			

Correlograma dos resíduos

	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	-0.079	-0.079	1.5220	
2	-0.208	-0.216	12.026	
3	-0.010	-0.050	12.050	0.001
4	0.045	-0.007	12.538	0.002
5	-0.054	-0.066	13.251	0.004
6	0.044	0.042	13.722	0.008
7	0.055	0.044	14.480	0.013
8	-0.049	-0.026	15.083	0.020
9	0.077	0.102	16.549	0.021
10	0.050	0.055	17.167	0.028
11	-0.064	-0.018	18.193	0.033
12	-0.086	-0.066	20.053	0.029
13	0.089	0.050	22.048	0.024
14	0.022	0.006	22.170	0.036
15	0.059	0.093	23.050	0.041
16	0.112	0.137	26.295	0.024
17	-0.087	-0.038	28.265	0.020
18	-0.066	-0.013	29.404	0.021
19	0.101	0.074	32.069	0.015
20	-0.010	-0.027	32.096	0.021
21	-0.038	0.015	32.473	0.028
22	0.075	0.052	33.978	0.026
23	0.085	0.071	35.896	0.022
24	-0.149	-0.113	41.834	0.007

Modelo B

Dependent Variable: D(HOUSE,1,12)
Method: Least Squares
Sample (adjusted): 1986M02 2005M12
Included observations: 239 after adjustments
Convergence achieved after 20 iterations
MA Backcast: 1984M01 1986M01

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	1.027255	0.296058	3.469773	0.0006
MA(1)	-0.552458	0.053822	-10.26450	0.0000
SMA(12)	-1.332734	0.059762	-22.30085	0.0000
SMA(24)	0.390877	0.057403	6.809328	0.0000

R-squared	0.671795	Mean dependent var	-1.259414
Adjusted R-squared	0.667605	S.D. dependent var	147.4373
S.E. of regression	85.00306	Akaike info criterion	11.73985
Sum squared resid	1697997.	Schwarz criterion	11.79803
Log likelihood	-1398.912	Hannan-Quinn criter.	11.76329
F-statistic	160.3387	Durbin-Watson stat	1.970618
Prob(F-statistic)	0.000000		

Inverted MA Roots	.99	.93	.86+.50i	.86-.50i
	.81-.47i	.81+.47i	.55	.50-.86i
	.50+.86i	.47-.81i	.47+.81i	.00+.99i
	.00-.99i	-.00-.93i	-.00+.93i	-.47-.81i
	-.47+.81i	-.50-.86i	-.50+.86i	-.81+.47i
	-.81-.47i	-.86+.50i	-.86-.50i	-.93
	-.99			

Correlograma dos resíduos

	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.010	0.010	0.0238	
2	-0.030	-0.030	0.2396	
3	-0.011	-0.010	0.2668	
4	0.058	0.057	1.0837	0.298
5	-0.045	-0.047	1.5797	0.454
6	0.015	0.019	1.6349	0.651
7	0.057	0.056	2.4464	0.654
8	-0.011	-0.016	2.4788	0.780
9	0.066	0.076	3.5664	0.735
10	-0.008	-0.014	3.5829	0.826
11	-0.055	-0.057	4.3375	0.825
12	0.045	0.056	4.8599	0.846
13	0.064	0.048	5.8986	0.824
14	0.009	0.013	5.9193	0.879
15	0.063	0.075	6.9412	0.861
16	0.122	0.106	10.803	0.627
17	-0.056	-0.054	11.626	0.636
18	-0.051	-0.038	12.315	0.655
19	0.089	0.081	14.389	0.570
20	-0.011	-0.025	14.420	0.637
21	-0.036	-0.027	14.757	0.679
22	0.031	0.018	15.010	0.722
23	0.077	0.058	16.592	0.679
24	-0.125	-0.120	20.800	0.471

13. Considere o seguinte modelo:

$$(1-0.35B)(1-B)Y_t = 52+\varepsilon_t\,,$$

onde ε_t é um ruído branco de média zero e variância unitária.

a) Com base nas observações Y_{99}=125.6 e Y_{100}=142.8, estabeleça previsões para os instantes t=101,102, 103.

b) Admitindo que o valor de Y_t no instante t=101 foi igual a 100.7, actualize as previsões obtidas na alínea anterior.

14. A série do consumo mensal de gasóleo, entre Janeiro de 1991 e Dezembro de 2007, e as respectivas funções de autocorrelação (FAC) e autocorrelação parcial (FACP) estimadas encontram-se na Figura 1.

a) Descreva o cronograma da série original e interprete as FAC e FACP estimadas.

b) Na Figura 2 encontram-se as FAC e FACP estimadas da série transformada com uma diferenciação simples e uma diferenciação sazonal. Com base nestas funções, proponha um modelo "candidato" a descrever a série original. Justifique convenientemente a sua escolha.

Figura 1

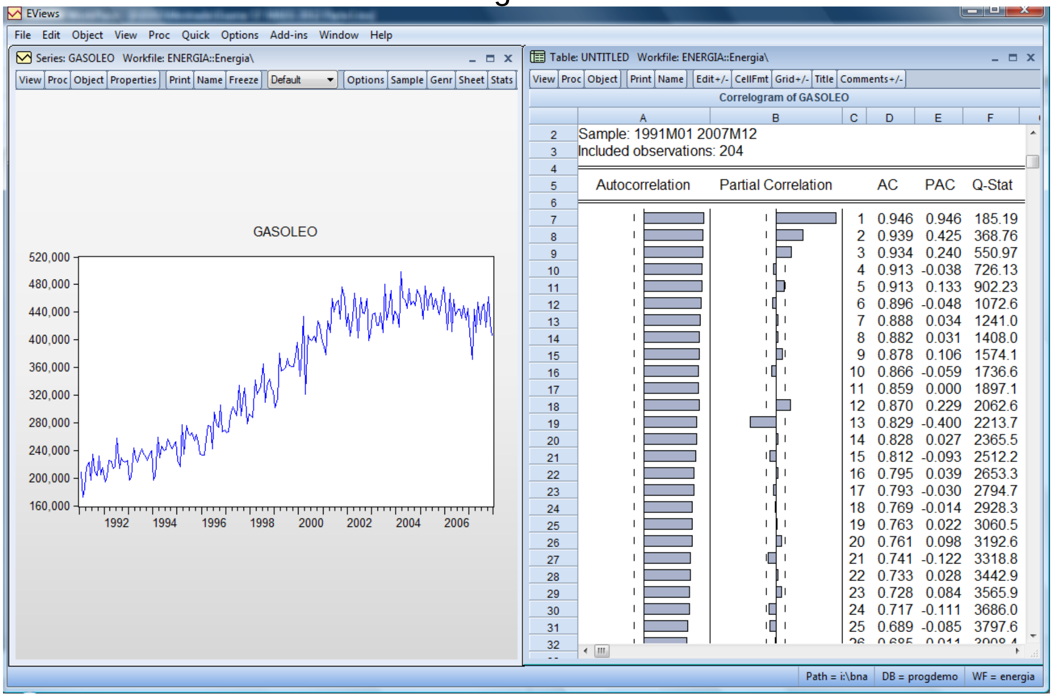
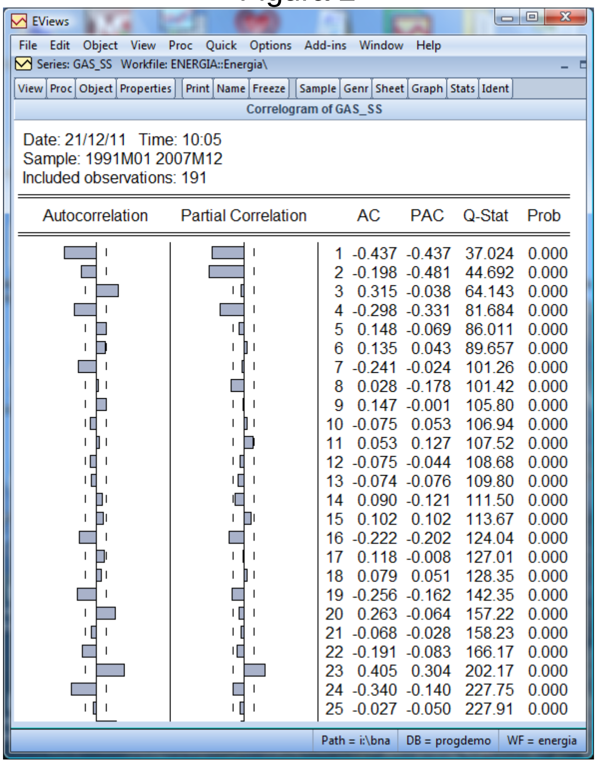
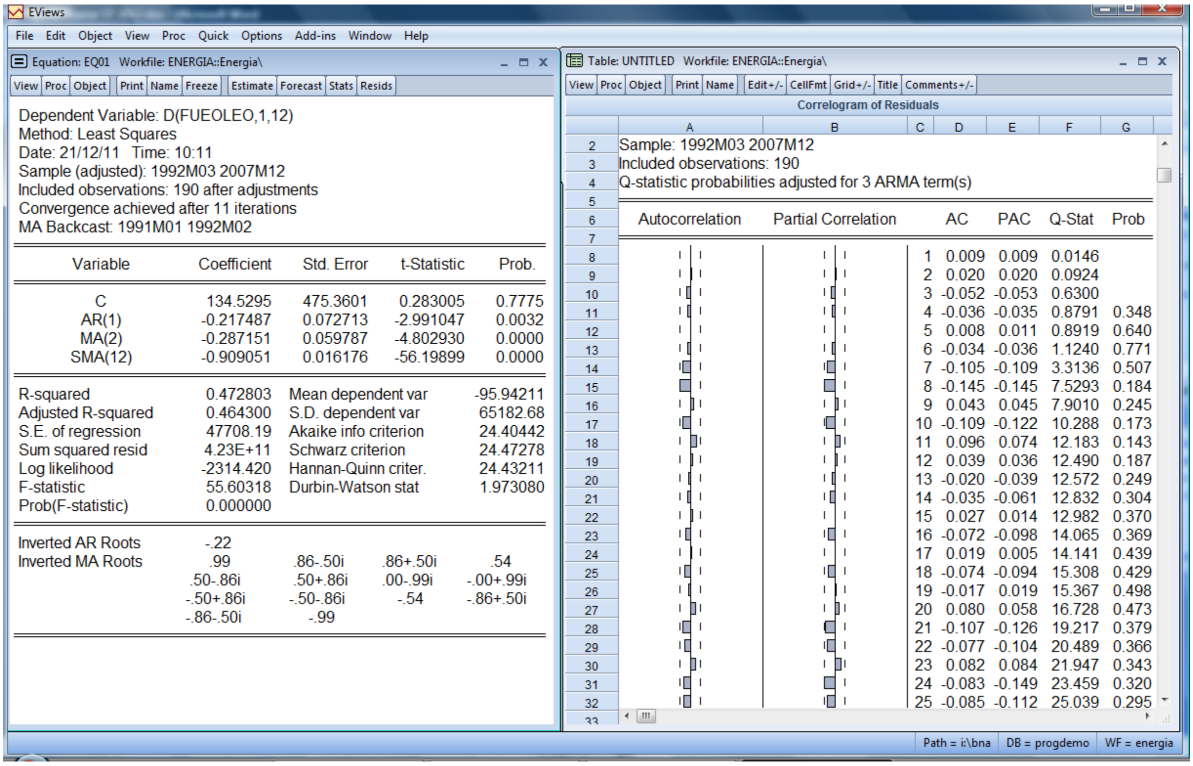


Figura 2



15. Num outro estudo do consumo de energia em Portugal, foi especificado e estimado pelo EViews um modelo de Box-Jenkins à série do consumo de fueóleo, cujos resultados se encontram na figura seguinte.



Equation: EQ01 Workfile: ENERGIA::Energia\

Dependent Variable: D(FUEOLEO,1,12)
Method: Least Squares
Date: 21/12/11 Time: 10:11
Sample (adjusted): 1992M03 2007M12
Included observations: 190 after adjustments
Convergence achieved after 11 iterations
MA Backcast: 1991M01 1992M02

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	134.5295	475.3601	0.283005	0.7775
AR(1)	-0.217487	0.072713	-2.991047	0.0032
MA(2)	-0.287151	0.059787	-4.802930	0.0000
SMA(12)	-0.909051	0.016176	-56.19899	0.0000

R-squared	0.472803	Mean dependent var	-95.94211
Adjusted R-squared	0.464300	S.D. dependent var	65182.68
S.E. of regression	47708.19	Akaike info criterion	24.40442
Sum squared resid	4.23E+11	Schwarz criterion	24.47278
Log likelihood	-2314.420	Hannan-Quinn criter.	24.43211
F-statistic	55.60318	Durbin-Watson stat	1.973080
Prob(F-statistic)	0.000000		

Inverted AR Roots	-.22			
Inverted MA Roots	.99	.86-.50i	.86+.50i	.54
	.50-.86i	.50+.86i	.00-.99i	-.00+.99i
	-.50+.86i	-.50-.86i	-.54	-.86+.50i
	-.86-.50i	-.99		

Table: UNTITLED Workfile: ENERGIA::Energia\

Correlogram of Residuals

Sample: 1992M03 2007M12
Included observations: 190
Q-statistic probabilities adjusted for 3 ARMA term(s)

	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.009	0.009	0.0146	
2	0.020	0.020	0.0924	
3	-0.052	-0.053	0.6300	
4	-0.036	-0.035	0.8791	0.348
5	0.008	0.011	0.8919	0.640
6	-0.034	-0.036	1.1240	0.771
7	-0.105	-0.109	3.3136	0.507
8	-0.145	-0.145	7.5293	0.184
9	0.043	0.045	7.9010	0.245
10	-0.109	-0.122	10.288	0.173
11	0.096	0.074	12.183	0.143
12	0.039	0.036	12.490	0.187
13	-0.020	-0.039	12.572	0.249
14	-0.035	-0.061	12.832	0.304
15	0.027	0.014	12.982	0.370
16	-0.072	-0.098	14.065	0.369
17	0.019	0.005	14.141	0.439
18	-0.074	-0.094	15.308	0.429
19	-0.017	0.019	15.367	0.498
20	0.080	0.058	16.728	0.473
21	-0.107	-0.126	19.217	0.379
22	-0.077	-0.104	20.489	0.366
23	0.082	0.084	21.947	0.343
24	-0.083	-0.149	23.459	0.320
25	-0.085	-0.112	25.039	0.295

Path = i:\bna DB = progdemo WF = energia

a) Identifique o modelo e escreva-o de modo a isolar a série FUEOLEO no primeiro membro.

b) Refira-se à qualidade estatística dos parâmetros estimados.

c) Teste a signficância global da FAC residual e da FACP residual para os primeiros 24 lags e refira-se à qualidade de ajustamento do modelo.

16. Considere que foi ajustado o modelo ARIMA(2,1,0) a uma série económica:

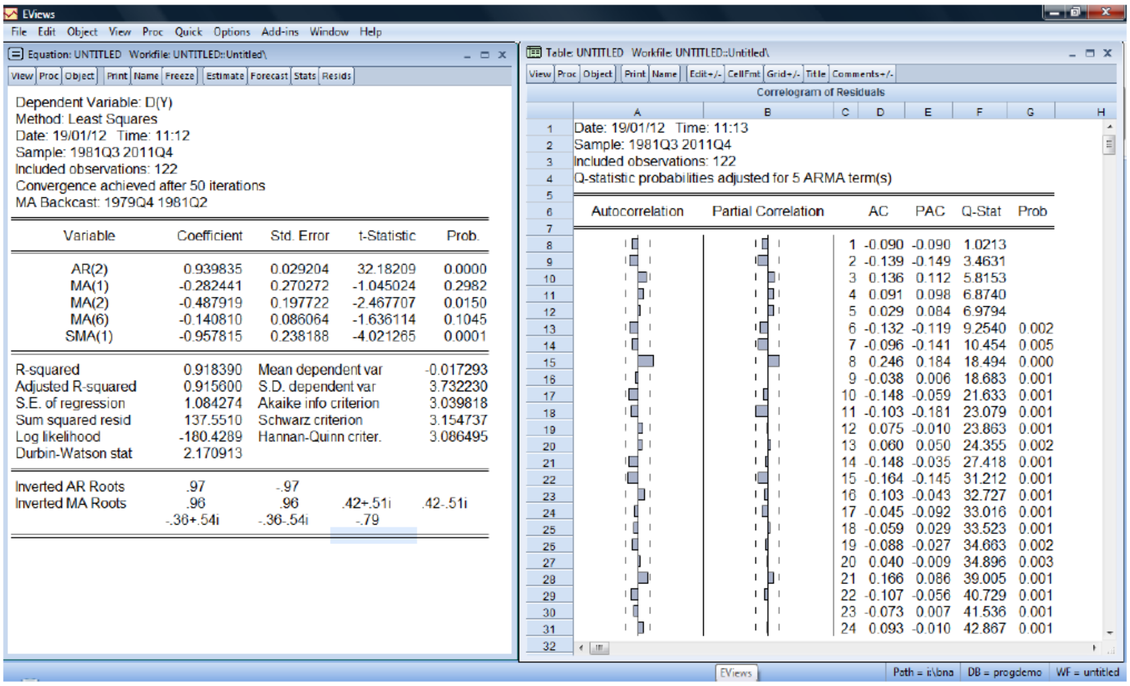
$$(1-1.2B+0.85B^2)(1-B)Y_t=\varepsilon_t$$

onde ε_t é um processo "ruído branco".

a) Com base nas últimas cinco observações disponíveis da série, $Y_{96}=100$, $Y_{97}=130$, $Y_{98}=175$, $Y_{99}=210$ e $Y_{100}=245$, respectivamente, estabeleça previsões para as observações Y_{101}, Y_{102} e Y_{103}.

b) Deduza a respectiva função de previsão.

17. A aplicação da metodologia de Box-Jenkins a uma série económica Y_t conduziu aos resultados de estimação seguintes:



Dependent Variable: D(Y)
Method: Least Squares
Date: 19/01/12 Time: 11:12
Sample: 1981Q3 2011Q4
Included observations: 122
Convergence achieved after 50 iterations
MA Backcast: 1979Q4 1981Q2

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(2)	0.939835	0.029204	32.18209	0.0000
MA(1)	-0.282441	0.270272	-1.045024	0.2982
MA(2)	-0.487919	0.197722	-2.467707	0.0150
MA(6)	-0.140810	0.086064	-1.636114	0.1045
SMA(1)	-0.957815	0.238188	-4.021265	0.0001

R-squared	0.918390	Mean dependent var	-0.017293
Adjusted R-squared	0.915600	S.D. dependent var	3.732230
S.E. of regression	1.084274	Akaike info criterion	3.039818
Sum squared resid	137.5510	Schwarz criterion	3.154737
Log likelihood	-180.4289	Hannan-Quinn criter.	3.086495
Durbin-Watson stat	2.170913		

Inverted AR Roots	.97	-.97		
Inverted MA Roots	.96	.96	.42+.51i	.42-.51i
	-.36+.54i	-.36-.54i	-.79	

Correlogram of Residuals

Date: 19/01/12 Time: 11:13
Sample: 1981Q3 2011Q4
Included observations: 122
Q-statistic probabilities adjusted for 5 ARMA term(s)

	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	-0.090	-0.090	1.0213	
2	-0.139	-0.149	3.4631	
3	0.136	0.112	5.8153	
4	0.091	0.098	6.8740	
5	0.029	0.084	6.9794	
6	-0.132	-0.119	9.2540	0.002
7	-0.096	-0.141	10.454	0.005
8	0.246	0.184	18.494	0.000
9	-0.038	0.006	18.683	0.001
10	-0.148	-0.059	21.633	0.001
11	-0.103	-0.181	23.079	0.001
12	0.075	-0.010	23.863	0.001
13	0.060	0.050	24.355	0.002
14	-0.148	-0.035	27.418	0.001
15	-0.164	-0.145	31.212	0.001
16	0.103	-0.043	32.727	0.001
17	-0.045	-0.092	33.016	0.001
18	-0.059	0.029	33.523	0.001
19	-0.088	-0.027	34.663	0.002
20	0.040	-0.009	34.896	0.003
21	0.166	0.086	39.005	0.001
22	-0.107	-0.056	40.729	0.001
23	-0.073	0.007	41.536	0.001
24	0.093	-0.010	42.867	0.001

a) Identifique o modelo e escreva-o sem o operador atraso.

b) Refira-se às suas qualidades estatística e de ajustamento.

18. Considere o modelo

$$(1-B)^2 Y_t = (1-0.7B-0.25B^2)\varepsilon_t$$

a) Será este modelo estacionário para Y_t? Justifique convenientemente a sua resposta.

b) Seja $W_t = (1-B)^2 Y_t$. Será este modelo estacionário para W_t? Justifique convenientemente a sua resposta.

c) Represente graficamente a FAC e a FACP teóricas do modelo para a série W_t.

19. Considere o modelo

$$(1-B^4)(1-B)Y_t = (1-0.2B)(1-0.6B^4)\varepsilon_t$$

onde ε_t é um processo "ruído branco". Com base na origem de previsão t=60, estabeleça previsões de Y_t a 1, 2 e 3 passos à frente.

20. Considere a seguinte função definida no conjunto dos números inteiros:

$$\rho_k = \begin{cases} |k| & \text{se } |k| \le 1 \\ 2-|k| & \text{se } 1 < |k| \le 2 \\ 0 & \text{se } |k| > 2 \end{cases}$$

Será que esta função pode ser considerada uma FAC de um processo estacionário? Justifique.

21. Seja Y_t um processo estacionário de média nula. Considere os processos $X_t = (1-0.4B)Y_t$ e $W_t = (1-2.5B)Y_t$

a) Determine as funções de autocovariância de X_t e W_t.
b) Mostre que X_t e W_t têm a mesma FAC.

22. Considere um modelo ARIMA(0,2,3).

a) Escreva o modelo com e sem o operador atraso.
b) Determine a expressão geral do preditor com origem em *t* e horizonte *m*.

23. Considere um modelo ARIMA(0,1,1). Mostre que:

$$Var[e_t(m)] = \sigma_\varepsilon^2\left(1+(m-1)(1-\theta^2)\right)$$

24. Considere um modelo ARIMA:

$$(1-0.2B)(1-B)Y_t = (1-0.8B)\varepsilon_t$$

com $\sigma_\varepsilon^2 = 4$. Suponha que $Y_{49} = 30$, $Y_{48} = 25$ e $\varepsilon_{49} = -2$. Calcule as previsões da série para os instantes 50, 51, 52 e 53.

25. Considere a processo AR(2):

$$(1-0.3B-0.6B^2)Y_t=\varepsilon_t$$

a) Represente-o na forma médias móveis.
b) Determine a FACP.

26. Considere o processo estacionário ARMA(2,1):

$$Y_t=2+1.3Y_{t-1}-0.4Y_{t-2}+\varepsilon_t+\varepsilon_{t-1}$$

a) Determine o valor médio de Y_t.
b) Será o processo invertível?

27. Considere o modelo MA(1):

$$Y_t=2+\varepsilon_t-0.6\varepsilon_{t-1},\ \text{com}\ \sigma_\varepsilon=0.1$$

a) Determine a expressão geral do preditor com origem em *t* e horizonte *m*.
b) Calcule a correspondente variância do erro de previsão.

28. Considere um modelo ARMA(1,1). Mostre que:

$$Var[e_t(m)]=\sigma_\varepsilon^2\left(1+\sum_{j=1}^{m-1}\phi^{2(j-1)}(\phi-\theta)^2\right)$$

29. Considere o modelo SARIMA(0,1,1)(0,1,1)$_{12}$:

$$(1-B)(1-B^{12})Y_t=(1-\theta_1B)(1-\Theta_1B^{12})\varepsilon_t$$

a) Escreva-o sem o operador atraso.
b) Suponha que $\theta_1=0.33$ e $\Theta_1=0.82$. Determine as previsões a 1, 2, 3 e *m* passos à frente com origem em $t=100$.

Parte III – MODELOS DE INTERVENÇÃO E DETECÇÃO DE OUTLIERS

1. Represente graficamente as funções de resposta às seguintes intervenções:

a) $\left[\frac{\omega_0}{(1-\delta B)}+\frac{\omega_1}{(1-B)}\right]P_t^{[T]}$;

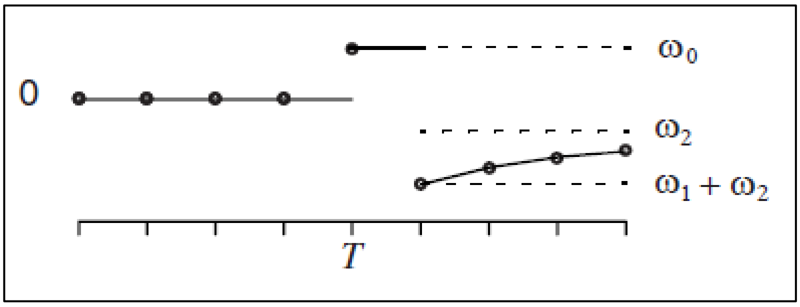
b) $\left[\omega_0+\frac{\omega_1 B}{(1-\delta B)}\right]P_t^{[T]}$.

2. Represente graficamente as funções de resposta às seguintes intervenções e discuta possíveis aplicações das várias intervenções:

a) $\left[\omega_0+\frac{\omega_1 B}{(1-\delta B)}+\frac{\omega_2 B}{(1-B)}\right]P_t^{[T]}$, com $\omega_0>0, \omega_1<0, \omega_2<0$ e $0<\delta>1$.

b) $\left[\frac{\omega_0}{(1-\delta B)(1-B)}\right]P_t^{[T]}$, com $\omega_0>0$ e $0<\delta>1$

3. Na figura seguinte encontra-se a função de resposta a uma intervenção numa série temporal:



a) Escreva o respectivo modelo de intervenção.

b) Mostre, analiticamente, que o salto no instante *T* tem magnitude ω_0.

c) Mostre, analiticamente, que o salto no instante *T*+1 tem magnitude $\omega_1+\omega_2$

Soluções dos Exercícios

Parte 1. Introdução aos Métodos de Previsão

1. 48.995 , 68,999 , 57.173 , 62.585

4. **a)** 0.1 **b)** a(1)=40 , b(1) =2.00 **c)** 54.80 , 56.94 , 59.08

Parte 2. Modelos Autoregressivos e de Médias Móveis (ARMA)

1. **Eq1:** $X_t=1.69-0.28X_{t-2}-0.30X_{t-12}+\varepsilon_t$, com $X_t=(1-B)(1-B^{12})Y_t$

Eq2: $X_t=4.62-0.35X_{t-12}+\varepsilon_t-0.31\varepsilon_{t-2}$, com $X_t=(1-B)(1-B^{12})Y_t$ e 4.62=(1+0.35)*3.42

2. 12.5; 10.5; 8.9

4. **a)** $X_t=0.00012-0.023X_{t-3}-0.128X_{t-8}-0.003X_{t-11}+\varepsilon_t-0.984\varepsilon_{t-4}-0.122\varepsilon_{t-12}+0.12\varepsilon_{t-16}$, com $X_t=(1-B)(1-B^4)Y_t$

6. **a)** Por exemplo: $SARIMA(0,1,0)(1,0,0)_4$

7. **a)** 95

a) $Y_t=0.054+0.91Y_{t-1}+Y_{t-12}-0.91Y_{t-13}+\varepsilon_t-0.31\varepsilon_{t-1}-0.84\varepsilon_{t-12}+0.26\varepsilon_{t-13}$

8. **c) (ii)** Por exemplo: $SARIMA(1,1,0)(1,1,0)_{12}$ ou $SARIMA(2,1,0)(1,1,0)_{12}$

11. **a)** 202

b) $SARIMA(1,1,0)(0,1,3)_4$

d) $\approx$5.3%

12. **c)** Por exemplo: $SARIMA(0,1,1)(0,1,1)_{12}$

13. **a)** 200.82; 273.13; 350.44

b) 100.7; 137.97; 203.01

14. **a)** Por exemplo: $SARIMA(2,1,0)(0,1,1)_{12}$

15. **a)** $SARIMA(1,1,2)(0,1,1)_{12}$, com $\theta_1=0$

$Y_t=(1+0.22)*135-0.22Y_{t-1}+\varepsilon_t-0.29\varepsilon_{t-2}-0.91\varepsilon_{t-12}+0.26\varepsilon_{t-14}$

b) Os parâmetros são significativos a 1%; Q=23.459 (prob=0.32); FAC Residual significativa no "lag" 8

16. **a)** 257.25; 242.2; 213.73

b) $P_t(1)=(1+\phi_1)Y_t+(\phi_2-\phi_1)Y_{t-1}+\phi_2Y_{t-2}$

$P_t(2)=(1+\phi_1)P_t(1)+(\phi_2-\phi_1)Y_t+\phi_2Y_{t-1}$

$P_t(m)=(1+\phi_1)P_t(m-1)+(\phi_2-\phi_1)P_t(m-2)+\phi_2P_t(m-3)$, m>2

17. **a)** $SARIMA(2,1,6)(0,0,1)_4$, com $\phi_1=0$ e $\theta_3=\theta_4=\theta_5=0$

$Y_t=Y_{t-1}+0.94Y_{t-2}-0.94Y_{t-3}+\varepsilon_t-0.28\varepsilon_{t-1}-0.49\varepsilon_{t-2}-0.96\varepsilon_{t-4}+0.27\varepsilon_{t-5}+0.61\varepsilon_{t-6}+0.13\varepsilon_{t-10}$

20. Não, pois $\rho(0)=0 \neq 1$

21. **a)** $\gamma_X(k)=(1-0.4B)^2\gamma_Y(k)$ e $\gamma_W(k)=(1-2.5B)^2\gamma_Y(k)$

22. **a)** $Y_t=2Y_{t-1}-Y_{t-2}+\varepsilon_t-\theta_1*\varepsilon_{t-1}-\theta_2*\varepsilon_{t-2}-\theta_3*\varepsilon_{t-3}$

b) $P_t(m)=2P_t(m-1)-P_t(m-2)$, $m>3$

24. 32.6; 33.12; 33.25; 33.28

25. **a)** $Y_t=\Sigma\psi_j\varepsilon_{t-j}$, com $\psi_1=0.3$ e $\psi_j=0.3\psi_{j-1}+0.6\psi_{j-2}$, $j>1$

b) $\phi_{11}=0.75$; $\phi_{22}=0.6$; $\phi_{kk}=0$, $k>2$

26. **a)** 20

b) Não

27. **a)** $Y_t(1)=2-0.6\varepsilon_t$; $Y_t(m)=2$, $m>1$

b) Var(Erro(1))=0.01; Var(Erro(m))=0.0136, m>1

Parte 3. Modelos de Intervenção e Detecção de Outliers